G-Homotopy Types of G-Complexes and Representations of G-Cohomology Theories (代数的位相幾何学)

AUTHOR(S):

村山, 光孝

数理解析研究所講究録
305巻 1977年 14-28

G-homotopy types of G-complexes and representations of G-cohomology theories

阪市大理　村山光孝

§0　Gは有限群とする。

X が G-complex とは，X：CW-complex with cellular G-action s.t. $\forall g \in G$ に対し，$X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$ は subcomplex，とする。

G-complex については Bredon [2] に於いて論じられているが，その中で，G-complex の基本的性質を次に挙げておく。

（以下，G-map，G-homotopy 等で equivariant map，equivariant homotopy 等を表わすことにする。）

○ G-homotopy extention property（[2], Chap I, §1）

○ G-cellular approximation theorem（[2], Chap II, Prop 5.6）

これらにより，mapping cylinder, mapping cone, equalizer, tellescope G-cofibration sequense 等が，(pointed) G-complex の category の中で構成できる。

又，J.H.C. Whitehead の定理が次の形で成立する。

○ Theorem of J.H.C.Whitehead for G-complexes ([2], Chap II, Cor 5.5)

X, Y : G-complexes, $f : X \to Y$ G-map とする。

このとき，次の (1), (2) は同値

(1) f は G-homotopy equivalence.

(2) ${}^{\forall}H \subset G$: subgroup に対し $f^H = f|_{X^H} : X^H \to Y^H$ は (weak) homotopy equivalence

§1では，さらに G-complex の G-homotopy type をもつ G-space は，Milnor [8] と parallel な性質を持つことを示す。ここでの主要な結果は，[Theorem 1.2] と [Corollary 1.5] である。

§2では [Corollary 1.5] を使って，Segal [9] で定義された，G-equivariant cohomology theory の Ω-G-spectrum による表現について論じる。

§1

$\mathcal{W}_G$ を G-complex の G-homotopy type をもつ G-space の category，

$\mathcal{W}_G^n$ を G-complex の n-ad の G-homotopy type をもつ G-space の n-ad の category とする。

Definition　K が simplicial G-complex とは，K は simplicial complex with simplicial G-action とする。

Theorem 1.1　(Cf J. Milnor [8], Theorem 2)

G-space の n-ad $\mathbb{A} = (A; A_1, \cdots A_{n-1})$ に対して次は同値

(a) $\mathbb{A} \in \mathrm{Obj}\, \mathcal{W}_G^n$

(b) $\mathbb{A}$ は G-complex の n-ad に G-dominated. i.e. $^\exists \mathbb{X}$: G-complex の n-ad

$^\exists f$: $\mathbb{A} \to \mathbb{X}$, g: $\mathbb{X} \to \mathbb{A}$ G-maps s.t $g \circ f \underset{G}{\simeq} 1_{\mathbb{A}}$ (G-homotopic)

(c) $\mathbb{A}$ は simplicial G-complex in the weak topology の n-ad の G-homotopy type をもつ。

(d) $\mathbb{A}$ は simplicial G-complex in the strong topology の n-ad の G-homotopy type をもつ。

<u>Proof</u> (a) ⇒ (b) は明らか。

(b) ⇒ (c) $S(\mathbb{A}) = (S(A); S(A_1) \cdots S(A_{n-1}))$; singular complex の n-ad とする。

$S(\mathbb{A})$ は induced G-action により, simplicial G-set の n-ad となる。

一般に K; simplicial G-set とすると, $|K|$ (K の geometric realization) は G-complex になる。∵ $^\forall g \in G$ に対し, K^g は K の subcomplex かつ $|K^g| = |K|^g$。又 $|K|$ は G-simplicial subdivision をもつ。

∴ $|S(\mathbb{A})|$ は simplicial G-complex の n-ad (weak topology) になる。

α; $|S(\mathbb{A})| \longrightarrow \mathbb{A}$, $\alpha(\sigma, y) = \sigma(y)$ $(\sigma, y) \in |S(A)|$ は G-map.

又 $|S(\mathbb{A})^g| = |S(\mathbb{A}^g)| = |S(\mathbb{A})|^g$ ($^\forall g \in G$) より. $^\forall H \subset G$; subgroup に対し

α^H; $|S(\mathbb{A})|^H \longrightarrow \mathbb{A}^H$ は weak homotopy equivalent (C.f J. Milnor [7])

∴ $\mathbb{X}$; G-complex の n-ad, とすると. Theorem of J.H.C. Whitehead for G-complex により. $\alpha_{\mathbb{X}}$; $|S(\mathbb{X})| \longrightarrow \mathbb{X}$ は G-homotopy equivalent

$\alpha'_{\mathbb{X}}$; $\mathbb{X} \to |S(\mathbb{X})|$ を $\alpha_{\mathbb{X}}$ の G-homotopy inverse とすれば,

J. Milnor [8] と同じ diagram を得る。

$$\begin{array}{ccccc}
|S(\mathbb{A})| & \xrightarrow{|S(f)|} & |S(\mathbb{X})| & \xrightarrow{|S(g)|} & |S(\mathbb{A})| \\
{\scriptstyle \alpha'_{\mathbb{A}}}\uparrow\downarrow{\scriptstyle \alpha_{\mathbb{A}}} & \circlearrowleft & {\scriptstyle \alpha_{\mathbb{X}}}\downarrow\uparrow{\scriptstyle \alpha'_{\mathbb{X}}} & \circlearrowleft & {\scriptstyle \alpha'_{\mathbb{A}}}\uparrow\downarrow{\scriptstyle \alpha_{\mathbb{A}}} \\
\mathbb{A} & \xrightarrow{f} & \mathbb{X} & \xrightarrow{g} & \mathbb{A}
\end{array}$$

$\alpha'_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to |S(\mathbb{A})|$ を $\alpha'_{\mathbb{A}} = |S(g)| \circ \alpha'_{\mathbb{X}} \circ f$ とすれば、$\alpha'_{\mathbb{A}}$ は $\alpha_{\mathbb{A}}$ の G-homotopy inverse である。 //

(c)⇒(a) $\mathbb{K}_w$ を simplicial G-complex in the weak topology の n-ad とすれば $Sd\,\mathbb{K}_w$ (一回重心細分) は G-complex の n-ad である。//

(c)⇔(d) $\mathbb{K}$ を simplicial G-complex の n-ad, $\mathbb{K}_w$ (resp $\mathbb{K}_s$) を $\mathbb{K}$ の weak (resp. strong) topology をもつ polyhedron とする。このとき $\mathbb{K}_w \underset{G}{\simeq} \mathbb{K}_s$ を示せばよい。

$\beta \in K^0$ (K の頂点) に対し、K_s の open set U_β を $U_\beta = \{x \in K_s \mid x_\beta > \max_{\gamma \in K^0} x_\gamma\}$ (x_β, x_γ は x の重心座標), $\mathcal{U} = \{U_\beta\}_{\beta \in K^0}$ とすると、$\mathcal{U}$ は locally finite open covering で、$\forall U_\beta \in \mathcal{U}, \forall g \in G$ に対し、$gU_\beta \in \mathcal{U}$ (このとき $\mathcal{U}$ を G-covering という)，$gU_\beta = U_{g\beta}$。($\mathcal{U}$ に G-action が入る。)

$p_\beta : K_s \to \mathbb{R}$ を $p_\beta(x) = d(x, K_s - U_\beta) / \sum_{\gamma \in K^0} d(x, K - U_\gamma)$, $x \in K_s$ (d は K_s の距離) とすると $\{p_\beta\}_{\beta \in K^0}$ は partition of unity subordinate to $\mathcal{U}$.

又、$p_\beta(x) = p_{g\beta}(gx)$. (このとき $\{p_\beta\}_{\beta \in K^0}$ を G-partition of unity という)

今 $\mathcal{U}$ の nurve は K である。∴ $p : \mathbb{K}_s \to \mathbb{K}_w$ を $p(x) = \sum_{\beta \in K^0} p_\beta(x)\beta$ とする。(p は n-ad の continuous G-map)。又 $i : \mathbb{K}_w \to \mathbb{K}_s$ (identity) は G-map, 又 $i \circ p$ は各 simplex をそれ自身の中に写す。∴ $(1-t)i \circ p + t 1_{\mathbb{K}_s}$ は、$i \circ p$ と $1_{\mathbb{K}_s}$ の G-homotopy，同様にして $p \circ i \underset{G}{\simeq} 1_{\mathbb{K}_w}$。∴ $i : \mathbb{K}_w \underset{G}{\simeq} \mathbb{K}_s : p$, q.e.d.

<u>Definition</u> (C.f. J. Milnor [8] P277)

G-space X が G-E.L.C.X (G-equilocally convex) とは.

$^\exists U \subset X \times X$, diagonal の G-invariant neighborhood

$^\exists \lambda : U \times I \to X$ G-map ($X \times X$ の G-action は diagonal action, $I = [0,1]$, trivial action,

s.t (1), $\lambda(x, y, 0) = x$. $\lambda(x, y, 1) = y$. $(x, y) \in U$

(2) $\lambda(x, x, t) = x$, $x \in X$, $t \in I$

$^\exists \mathcal{V} = \{V_\beta\}$ open covering of X (V_β は convex set)

s.t $V_\beta \times V_\beta \subset U$ $\lambda(V_\beta \times V_\beta \times I) = V_\beta$.

同様に G-space の n-ad $\mathbb{X} = (X; X_1, \cdots X_{n-1})$ が G-E.L.C.X とは.

X は G-E.L.C.X, X_i $i = 1 \cdots n-1$ は closed G-subspace.

s.t (4) $x, y \in X_i$ $(x, y) \in U \Rightarrow \lambda(x, y, t) \in X_i$, $t \in I$, $i = 1, \cdots n-1$.

(この λ を structure map という。)

$\mathcal{V}$ は G-covering でなくてよい。実際. λ は G-map であるから.

gV_β は convex, ∴ $\mathcal{V}$ に gV_β を加えて G-covering にできる。

<u>Theorem 1.2</u> G-space の n-ad $\mathbb{A} = (A; A_1 \cdots A_{n-1})$ に対し, 次の

(i), (ii), (iii) は同値

(i) $\mathbb{A} \in \mathrm{Obj}\, \mathcal{W}_G^n$

(ii) $\mathbb{A}$ は metrizable G-E.L.C.X の G-homotopy type をもつ。

(iii) $\mathbb{A}$ は paracompact G-E.L.C.X の G-homotopy type をもつ。

<u>proof</u> (i) ⇒ (ii) (C.f J. Milnor [8] lemma 2)

$\mathbb{K}_S = (K, K_1 \cdots K_{n-1})$: simplicial G-complex in the strong topology の n-ad が

metrizable G-E.L.C.X であることを示せばよい。(∵ Theorem 1.1)
$V_\beta = O(\beta, K)$ (open star) $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in K^0}$ $U = \bigcup_{\beta\in K^0} V_\beta\times V_\beta$
$\mu : U \to K$ を $\mu(x,y)_\beta = \min(x_\beta, y_\beta) / \sum_{\delta\in K^0} \min(x_\delta, y_\delta)$ とし、
$\lambda : U\times I \to K$ を

$$\lambda(x,y,t) = \begin{cases} (1-2t)x + 2t\,\mu(x,y) & 0\le t\le \frac{1}{2} \\ (2-2t)\,\mu(x,y) + (2t-1)y & \frac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases}$$ とする

と、(1)(2)(3)(4) をみたす。∴ $|K|_s$ は G-E.L.C.X で metrizable。//
(ii) ⇒ (iii) は明らか, (iii) ⇒ (i) (C.f J. Milnor [8] lemma 4).
$|A|$ は paracompact G-E.L.C.X としてよい。Theorem 1.1 より $|A|$ は G complex の n-ad に G dominated, を示せばよい。

$\mathcal{V} = \{V_\beta\}$ を A の convex G-covering とする。A は paracompact。∴ fully normal。∴ $\mathcal{V}$ の細分 $\mathcal{W}'$ で A の各点 a の $\mathcal{W}'$ に関する star $S(a,\mathcal{W}')$ がある $V_\beta\in\mathcal{V}$ に含まれるような open covering $\mathcal{W}'$ をとる。又 G は finite で A_i $i=1\cdots n-1$ は closed。∴ 次の (i)(ii)(iii) をみたす open G-covering $\mathcal{W} = \{W_a\}_{a\in A}$ がとれる。(i) $gW_a = W_a$ or. $gW_a\cap W_a = \phi$ $\forall g\in G$
(ii) $\mathcal{W}$ は $\mathcal{W}'$ の細分 (iii) $W_a\cap A_i \neq \phi \Rightarrow a\in A_i$
$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ を $\mathcal{W}$ の細分である locally finite open G-covering とする。
A_i closed より $\overline{U_\alpha}\cap A_{i_1}\neq\phi, \cdots, \overline{U_\alpha}\cap A_{i_k}\neq\phi \Rightarrow \overline{U_\alpha}\cap A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\neq\phi$, となるようにとることができる。N を $\mathcal{U}$ の nurve, subcomplex N_i を '$\langle\alpha_0\cdots\alpha_k\rangle$ は N_i の k-simplex $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $A_i\cap\overline{U_{\alpha_0}}\cap\cdots\cap\overline{U_{\alpha_k}}\neq\phi$' と定義する。これにより, simplicial G-complex の n-ad $\mathbb{N} = (N; N_1 \cdots N_{n-1})$ を得る。
$\{P_\alpha\}$ を G-partition of unity subordinate to $\mathcal{U}$ とする。(partition of

unity $\{p'_\sigma\}$ に対し，平均 $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} p'_{g\sigma}(ga)$ をつくればよい。)

$p: A\to N$ を $p(a)=\sum_\sigma p_\sigma(a)\sigma$ とすると，p は n-ad の G-map $p:\mathbb{A}\to\mathbb{N}$ になる。

G-map $q:\mathbb{N}\to\mathbb{A}$ を次の様に定義する。$\mathrm{Sd}N$ を N の重心細分とし，$\mathrm{Sd}N$ の頂点に順序を $\sigma<\sigma'\Leftrightarrow\sigma\subset\sigma'$ となるように入れる。このとき G-action はこの順序を保つ。$\mathrm{Sd}\mathcal{U}=\{\overline{V}'_\sigma ; \overline{V}_{\sigma_0}\cap\cdots\cap\overline{V}_{\sigma_k}(\neq\phi)\}$ $\sigma=\langle\sigma_0\cdots\sigma_k\rangle$ とする。各 $\overline{V}'_\sigma\in\mathrm{Sd}\mathcal{U}$ に対し，$\overline{W}_{a_\sigma}\in\mathcal{W}$ を，$\overline{V}'_\sigma\subset\overline{W}_{a_\sigma}$, $g\overline{W}_{a_\sigma}=\overline{W}_{ga_\sigma}$ となるように選ぶ。($a_\sigma\in A$)

q を $\mathrm{Sd}N$ の skelton による induction で構成する。

(1) $\sigma\in\mathrm{Sd}N^0$ (σ は $\mathrm{Sd}N$ の頂点) に対し，$q(\sigma)=a_\sigma$.

(2) k-simplex $\langle\sigma_0<\cdots<\sigma_k\rangle$ の点 $x\in\langle\sigma_0,\cdots\sigma_k\rangle$, $x=(1-t)\sigma_0+ty$, $y\in\langle\sigma_1\cdots\sigma_k\rangle$ に対し，$q(x)=\lambda(a_{\sigma_0},q(y),t)$, $t\in I$.

こうすると q は well defined, continuous G-map になる。又，$\langle\sigma_0<\cdots<\sigma_k\rangle\subset\mathrm{Sd}N_i\Rightarrow\overline{V}_{\sigma_0}\cap\cdots\cap\overline{V}_{\sigma_k}\neq\phi$，∴ $a_{\sigma_j}\in A_i$ $j=0\cdots k$，従って λ の性質により，inductive に q は n-ad の G-map $:\mathbb{N}\to\mathbb{A}$ が示される。

$^\forall a\in A$ に対し，$\overline{V}_\beta$ を $S(a,\mathcal{W})\subset\overline{V}_\beta$ なるものとすれば，$q\circ p(a)\in\overline{V}_\beta$ ∴ $(a,q\circ p(a))\in\overline{V}_\beta\times\overline{V}_\beta\subset\overline{V}$，∴ $f_t:A\to A$, $f_t(a)=\lambda(a,q\circ p(a),t)$ は $q\circ p(a)$ と I_A の G-homotopy を与える。 q.e.d.

Proposition 1.3 (c.f. [8], prop 3)

$\mathbb{A}=(A;A_1\cdots A_{n-1})\in Ob\mathcal{W}_G^n$, $\mathbb{B}=(B;B_1\cdots B_{m-1})\in Ob\mathcal{W}_G^m$ ならば

$\mathbb{A}\times\mathbb{B}=(A\times B;A_1\times B,\cdots A_{n-1}\times B, A\times B_1\cdots A\times B_{m-1})\in Ob\mathcal{W}_G^{n+m-1}$

proof Theorem 1.2 により，$\mathbb{A},\mathbb{B}$ は metrizable, G-E.L.C.X.

としてよい。このとき $\mathbb{A}\times\mathbb{B}$ は product metric により metrizable かつ convex set として，$\mathbb{A},\mathbb{B}$ の convex set の product を，structure map として $\mathbb{A},\mathbb{B}$，の structure map の product をとれば $\mathbb{A}\times\mathbb{B}$ は G-E.L.C.X.。∴ Theorem 1.2 により $\mathbb{A}\times\mathbb{B}\in Ob\,\mathcal{W}_G^{n+m-1}$ //

X,Y を G-spaces とする。function space $F(X,Y)$ は次の G-action により G-space となる，$(g\varphi)(x)=g\varphi(g^{-1}x)$，$\varphi\in F(X,Y)$，$x\in X$，$g\in G$，

<u>Theorem 1.4</u> （C.f. [8], Thm. 3）

$\mathbb{A}=(A;A_1\cdots A_{n-1})\in Ob\,\mathcal{W}_G^n$，$\mathbb{C}=(C,C_1\cdots C_{n-1})$ compact G-space の n-ad とすると，$F(\mathbb{C},\mathbb{A})=(F(C,A);F(C,C_1;A,A_1)\cdots\cdots F(C,C_{n-1};A,A_{n-1}))\in Ob\,\mathcal{W}_G^n$

<u>proof</u>　Theorem 1.2 により，$\mathbb{A}$ は metrizable G-E.L.C.X としてよい。このとき $F(C,A)$ は metrizable で $F(C,C_i;A,A_i)$ $i=1\cdots n-1$ は closed G-sub space，（C,C_i は compact より）[8], lemma 3 と同様に，$U'\subset F(C,A)\times F(C,A)$ を $U'=\{(\varphi,\psi)\in F(C,A)\times F(C,A)\mid(\varphi(c),\psi(c))\in U,\ c\in C\}$ $\lambda':U'\times I\to F(C,A)$ を $\lambda'(\varphi,\psi,t)(c)=\lambda(\varphi(c),\psi(c),t)$，$c\in C$，$(\varphi,\psi)\in U'$，$t\in I$ 各 $\varphi\in F(C,A)$ に対し，φ の convex open neighborhood を $F(C,D_1\cdots D_k;A,V_{\beta_1}\cdots V_{\beta_k})$ とすれば $F(\mathbb{C},\mathbb{A})$ は G-E.L.C.X。ここに $\varphi(D_i)\subset V_{\beta_i}$ $i=1\cdots k$ $D_1\cdots D_k$ は C の compact set covering。//

V を finite dimensional G-module とする。$\Sigma^V=V^c$：V の 1 点 compact化，とする。X を pointed G-space，$x_0\in X$ を base point とする。（base point は常に X^G の中にあるとする。）

$\Omega^V(X)=F(\Sigma^V,*;X,x_0)$ とおき，（$\dim V$ fold）loop space と呼ぶ。

$\Omega^V(X)$ は constant map $e: \Sigma^V \to x_0$ を base point にもつ。

<u>Corollary 1.5</u> (Cf. [8], Cor 3)

$(X; x_0) \in \mathcal{W}_G^2$ ならば, $(\Omega^V(X), e) \in \mathcal{W}_G^2$.

<u>proof</u> Theorem 1.4 より $C = (\Sigma^V; *, \Sigma^V)$, $A = (X, x_0, x_0)$ とすれば $(F(\Sigma^V, X); \Omega^V(X), e) \in \mathcal{W}_G^3$ ∴ $(\Omega^V X, e) \in \mathcal{W}_G^2$ //

§2

まず Brown-Adams の表現定理について論じ, それを使って G-cohomology theory の Ω-G-spectrum による表現を考える。

$\mathcal{CW}_0^G$ を pointed G-complex の category, $\mathcal{CW}_*^G$ を $\mathcal{CW}_0^G$ の full subcategory で $X \in Ob\,\mathcal{CW}_*^G \longleftrightarrow X^H$ は connected, ${}^\forall H \subset G$ subgroup なるものとする。h を $\mathcal{CW}_0^G$ 上の Brown functor (G-homotopy functor で Wedge axiom, Mayer-Vietoris axiom をみたすもの) とする。$Y \in Ob\,\mathcal{CW}_*^G$, $u \in h(Y)$ に対し, $T_u: [X, Y]^G \to h(X)$, $T_u[f] = f^* u$ ($[\ ,\ ]^G$ は pointed G-homotopy class の set) は $\mathcal{CW}_*^G$ 上の functor の natural transformation である。

$[G/H^+ \wedge S^n, Y]^G \cong \pi_n(Y^H)$ $n \geq 1$ (S^n の G-action は trivial) に注意する。$f: Y \to Y'$ $\mathcal{CW}_*^G$ の map が $X = G/H^+ \wedge S^n$ $n \geq 1$, ${}^\forall H \subset G$: subgroup に対し $f_*: [X, Y]^G \cong [X, Y']^G$ をみたせば, Theorem of J.H.C Whitehead for G-complexes により f は G-homotopy equivalence。

従って, mapping cone, equator 等が $\mathcal{CW}_*^G$ の中で構成できることに注意して, $\{S^n; n\geq 1\}$ のかわりに $\{G/H^+\wedge S^n; n\geq 1, H\subset G \text{ subgroup}\}$ に対して Brown の construction を行なえば次の proposition を得る。

Proposition 2.1

$\mathcal{CW}_*^G$ 上の Brown functor h は representable。

i.e. $\exists Y\in \mathcal{CW}_*^G$, $\exists u\in h(Y)$, such that $T_u: [X,Y]^G \cong h(X)$, $X\in\mathcal{CW}_*^G$ (natural equivalence), Y は unique up to G-homotopy equivalence.

次に $\mathcal{CF}_*^G$ を finite G-complex からなる $\mathcal{CW}_*^G$ の full subcategory として, $\mathcal{CF}_*^G$ 上の group-valued Brown functor h の表現を Adams の方法に従って述べる。

$X\in \mathcal{CW}_*^G$ に対し, $\hat{h}(X)=\varprojlim_{\gamma} h(X_\gamma)$, $X_\gamma\in\mathcal{CF}_*^G$, $X_\gamma\subset X$: G-subcomplex とおく。次のことに注意する。

Lemma

$X\in\mathcal{CW}_*^G$ は $X=\bigcup_\gamma X_\gamma$ と表わせる。ここに $X_\gamma\in \mathcal{CF}_*^G$, $X_\gamma\subset X$: G-subcomplex

proof. $\forall K\subset X$: finite G-subcomplex に対し $\exists K'\in\mathcal{CF}_*^G$ s.t. $K\subset K'$, $K'\subset X$ G-subcomplex, を G の subgroup H の inclusion による induction で示す。$K\subset K_1$; finite G-subcomplex of X を $\forall H'\subsetneqq H$: proper subgroup に対し $K_1^{H'}$ は connected なるものと仮定する。K_1^H の各 connected component と base point を結ぶ X^H 内の path を L_i とし $K_2=K_1\cup(\bigcup_i G\cdot L_i)$ とすれば G は finite より, K_2 は finite G-subcomplex で $K\subset K_2$, $K_2^{H'}$: connected for $\forall H'\subseteqq H$ subgroup (L_i は sub complexとなるようにとる。) 又 G: finite よりこの操作は有限回で終る。 //

$\hat{h}$ は $\mathcal{CW}_*^G$ 上の weak G-homotopy functor ([1]) で,
$Y \in \mathcal{CW}_*^G$, $u \in \hat{h}(Y)$ に対し,

$T_u: [X, Y]^G \to h(X)$, $X \in \mathcal{C}\mathfrak{F}_*^G$ $T_u([f]) = f^* u$

$\hat{T}_u: [X, Y]_w^G \to \hat{h}(X)$ $X \in \mathcal{CW}_*^G$ $\hat{T}_u([f]) = f^* u$

は natural transformation。

又, finite G-complex は, ある finite simplicial G-complex に G-homotopy equivalent だから, finite G-complex の G-homotopy type は countable, 又 finite simplicial G-complexes K, K' に対し, $^\forall f: K \to K'$ G-map は, simplicial G-map に G-approximate される。
∴ $[K, K']^G$ は countable set。 (これらの construction は各 cell (simplex) の G-orbit の代表元に対してつくり, G-action で equivariant に拡張することにより, 普通の場合と同様にしてできる。) 従って Adams [1] と同様にして次の proposition を得る。

<u>Proposition 2.2</u>

$\mathcal{C}\mathfrak{F}_*^G$ 上の group valued Brown functor h は representable
i.e., $^\exists Y \in \mathcal{CW}_*^G$ $^\exists u \in \hat{h}(Y)$ s.t. $T_u: [X, Y]^G \cong h(X)$, $X \in \mathcal{C}\mathfrak{F}_*^G$
さらに, Y は unique, up to G-homotopy equivalence

<u>Remark</u> [1] Theorem 1.9 の analogue; $\hat{T}_u: [X, Y] \cong \hat{h}(X)$ は, Y にある種の Hopf space structure を入れて, $\hat{T}_u$ を group

の isomorphism にすることができる。

次に G-cohomology theory (c.f. G. Segal [9]) を定義する。

Definition

$\tilde{h}^*_G = \{\tilde{h}^\alpha, \alpha \in RO(G)\}$ ($RO(G)$ は G の実表現環) が $\mathcal{W}_0^G$ ($\mathcal{F}_0^G$) 上の reduced G-cohomology theory とは次の A1), A2) をみたすもの.

A1) $\tilde{h}^\alpha, \alpha \in RO(G)$ は $\mathcal{CW}_0^G$ ($\mathcal{CF}_0^G$) 上で Mayer-Vietoris axiom, Wedge axiom をみたす contravariant G-homotopy functor。

A2) 各 V: finite dimentional G-module に対し, natural, suspension isomorphism $\sigma^V : \tilde{h}^\alpha(X) \cong \tilde{h}^{\alpha+V}(\Sigma^V X)$, $^\forall\alpha \in RO(G)$ $\Sigma^V X = \Sigma^V \wedge X$ が定義される。

$\mathcal{F}_0^G$ 上の G-cohomology theory の表現を考える。

$\tilde{h}^\alpha | \mathcal{CF}_*^G$ に対し, $^\exists Y'_\alpha \in \mathcal{CW}_*^G$ s.t $[X, Y'_\alpha]^G \cong \tilde{h}^\alpha(X)$, $X \in \mathcal{CF}_*^G$ (prop. 2.2)

$Y_\alpha = \Omega Y'_{\alpha+1}$ $(= \Omega^1 Y'_{\alpha+1})$ (1 は 1-dim. trivial G-module) とおく。

Y_α は loop space として Hopf space (H-space)で, その積は G-action と可換。この意味で Y_α を Hopf G-space と呼ぶ。このとき, 各 $H \subset G$: subgroup に対し, Y_α^H は Hopf space。

又, $X \in \mathcal{CW}_0^G \Rightarrow \Sigma X = \Sigma^1 X \in \mathcal{CW}_*^G$ であるから, $X \in \mathcal{CF}_0^G$ に対し

$\tilde{h}^\alpha(X) \overset{\sigma^1}{\cong} \tilde{h}^{\alpha+1}(\Sigma X) \cong [\Sigma X, Y'_{\alpha+1}]^G \cong [X, \Omega Y'_{\alpha+1}]^G = [X, Y_\alpha]^G$, $\alpha \in RO(G)$

は natural group isomorphism 。

$X \in \mathcal{CW}_*^G$ に対し, $\hat{h}^\alpha(X) = \varprojlim_\gamma \tilde{h}^\alpha(X_\gamma)$, $X_\gamma \in \mathcal{CF}_*^G$, $X_\gamma \subset X$: G-subcomplex

とおくと, $\hat{h}^\alpha(X) = \varprojlim_\gamma \tilde{h}^\alpha(X_\gamma) \cong \varprojlim_\gamma [X_\gamma, Y_\alpha]^G = [X, Y_\alpha]^G_W$

又, $\hat{h}^{\alpha}(X) = \varprojlim_{\lambda} \hat{h}^{\alpha}(X_\lambda) \overset{\sigma^{\bar{V}}}{\cong} \varprojlim_{\lambda} \hat{h}^{\alpha+\bar{V}}(\Sigma^{\bar{V}} X_\lambda) = \hat{h}^{\alpha+\bar{V}}(\Sigma^{\bar{V}} X)$.

$\therefore [X, Y_\alpha]^G_W \cong \hat{h}^{\alpha}(X) \overset{\sigma^{\bar{V}}}{\cong} \hat{h}^{\alpha+\bar{V}}(\Sigma^{\bar{V}} X) \cong \varprojlim_{\lambda} [\Sigma^{\bar{V}} X_\lambda, Y_{\alpha+\bar{V}}]^G \cong \varprojlim_{\lambda} [X_\lambda, \Omega^{\bar{V}} Y_{\alpha+\bar{V}}]^G \cong [X, \Omega^{\bar{V}} Y_{\alpha+\bar{V}}]^G_W$

今, Thm 1.5 により, $Y_\alpha, \Omega^{\bar{V}} Y_{\alpha+\bar{V}} \in \mathcal{CW}_0^G$ としてよい。

$[X, Y_\alpha]^G_W \cong [X, \Omega^{\bar{V}} Y_{\alpha+\bar{V}}]^G_W$ において $X = Y_\alpha, \Omega^{\bar{V}} Y_{\alpha+\bar{V}}$ として, $1_{Y_\alpha}, 1_{\Omega^{\bar{V}} Y_{\alpha+\bar{V}}}$ に対応する G-map を $f_{\alpha,\bar{V}} : Y_\alpha \to \Omega^{\bar{V}} Y_{\alpha+\bar{V}}$, $g_{\alpha,\bar{V}} : \Omega^{\bar{V}} Y_{\alpha+\bar{V}} \to Y_\alpha$ とする。

このとき. $(f_{\alpha,\bar{V}})_* = (g_{\alpha,\bar{V}})_*^{-1}$, $f_{\alpha,\bar{V}} \circ g_{\alpha,\bar{V}} \underset{G,W}{\simeq} 1_{\Omega^{\bar{V}} Y_{\alpha+\bar{V}}}$, $g_{\alpha,\bar{V}} \circ f_{\alpha,\bar{V}} \underset{G,W}{\simeq} 1_{Y_\alpha}$, で $f_{\alpha,\bar{V}}, g_{\alpha,\bar{V}}$ は Hopf G-space の weak morphism。又, $Y_\alpha, \Omega^{\bar{V}} Y_{\alpha+\bar{V}} \in \mathcal{CW}_0^G$

$\therefore {}^\forall H \subset G$: subgroup に対し $f^H_{\alpha,\bar{V}}, g^H_{\alpha,\bar{V}}$ は Hopf complex の weak morphism で.

$f^H_{\alpha,\bar{V}} \circ g^H_{\alpha,\bar{V}} \underset{W}{\simeq} 1_{(\Omega^{\bar{V}} Y_{\alpha+\bar{V}})^H}$ $g^H_{\alpha,\bar{V}} \circ f^H_{\alpha,\bar{V}} \underset{W}{\simeq} 1_{Y_\alpha^H}$。 $\therefore (f^H_{\alpha,\bar{V}})_* : \pi_n(Y_\alpha^H) \cong \pi_n((\Omega^{\bar{V}} Y_{\alpha+\bar{V}})^H)$ $(n \geq 0)$

$\therefore f^H_{\alpha,\bar{V}}$ は Hopf complex の weak homotopy equivalence を与える。

$\therefore$ Theorem of J.H.C. Whitehead for G-complexes により, $f_{\alpha,\bar{V}}$ は G-homotopy equivalence. $f_{\alpha,\bar{V}} : Y_\alpha \underset{G}{\simeq} \Omega^{\bar{V}} Y_{\alpha+\bar{V},0}$ 従って次を得る。

<u>Theorem 2.3</u>

$\hat{h}^*_G = \{\hat{h}^\alpha ; \alpha \in RO(G)\}$ を $\mathcal{W}_0^G$ $(\mathcal{F}_0^G)$ 上の G-cohomology theory とすると, ${}^\forall \alpha \in RO(G)$, ${}^\exists Y_\alpha \in \mathcal{CW}_0^G$ s.t Y_α は Hopf G-complex で $\hat{h}^\alpha$ を group valued functor として represent する。, 又, finite dimensional G-module $\bar{V}$ に対し, ${}^\exists f_{\alpha,\bar{V}} : Y_\alpha \underset{G}{\simeq} \Omega^{\bar{V}} Y_{\alpha+\bar{V}}$, $f_{\alpha,\bar{V}}$ は (Weak) morphism of Hopf G-complexes。これは suspension isomorphism $\sigma^{\bar{V}}$ を induce する。

W を各 irreducible G-module の copy を1つづつ直和したものとする。(trivial G-module を含む。) G-spectrum $\mathbb{E}$ を $\mathbb{E} = \{E_n ; \varepsilon_n, \varepsilon_n : \Sigma^W E_n \to E_{n+1}\}, n \in \mathbb{Z}\}$. ($E_n \in \mathcal{W}_0^G$, ε_n : G-map) で定義する。

$^{\forall} n \in \mathbb{Z}$, に対し, $\varepsilon_n' : E_n \to \Omega^{\omega} E_{n+1}$ (ajoint of ε_n) が G-homotopy equivalence のとき, $\mathbb{E}$ を Ω-G-spectrum という。

Theorem 2.3 で, $E_n = Y_{n\omega}$ $\varepsilon_n' = f_{n\omega,\omega} : E_n \underset{G}{\simeq} \Omega^{\omega} E_{n+1}$ とおいて Ω-G-spectrum $\mathbb{E} = \{E_n, \varepsilon_n : \Sigma^{\omega} E_n \to E_{n+1}, n \in \mathbb{Z}\}$ を得る。

Theorem 2.4

全ての reduced G-cohomology theory $\tilde{h}_G^* = \{\tilde{h}^\alpha ; \alpha \in RO(G)\}$ は Ω-G-spectrum で represent できる。i.e. $^{\forall}\alpha \in RO(G)$ に対し, 次の natural isomorphism (as groups) を得る。

$$\tilde{h}^\alpha(X) \cong [X, \Omega^V E_n]^G \quad X \in \mathcal{W}_0^G(\mathcal{F}_0^G)$$

ここに, V: finite dimensional G-module, $\alpha + V = n\omega$.

References

[1] J.F. Adams, A variant of E.H Brown's representability theorem, Topology 10(1971)185-198

[2] G.E. Bredon, Equivariant cohomology theories, Lect. Note in Math 34 Springer-Verlag

[3] E.H. Brown Cohomology theories, Ann. of Math. 75(1962) 467-484 Correct. Ann of Math 78 P201

[4] E.H. Brown. Abstruct homotopy theory, Trans. Amer. Math. Soc 119(1965) 79-85.

[5] T. Matumoto On G-CW complexes and a theorem of J.H.C. Whitehead J. Fac. Soc, Univ. of Tokyo Sect I 18 (1973) 363-374.

[6] T. Matumoto, Equivariant cohomology theories on G-CW complexes, Osaka J. Math. 10(1973) 51-68

[7] J. Milnor The geometric realization of a semi-simplicial complex Ann. of Math. 65(1957) 357-362

[8] J. Milnor. On spaces having the homotopy type of a CW-complex. Trans. Amer

Math. Soc. 90 (1959) 272-280

[9] G. B. Segal Equivariant stable homotopy theories. Actes Congrès intern. math. 1970 tom 2 59-63